Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.87-101

ЧАСТОТНО- ВЫСОКОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ПО ВЫХОДУ*

Н.И. Велиева[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: nailavi@rambler.ru

Резюме. В данной работе, используя частотный алгоритм параметризации, предложен вычислительный алгоритм для решения линейно- квадратичной гауссовой задачи оптимального синтеза по выходу при непрерывном времени. Предложенный алгоритм связан с факторизацией эрмитовых матричных полиномов, представлением Matrix Fraction Decomposition (MFD), решением Диофантова уравнения, и сепарацией дробно-рациональных выражений, которые позволяют найти символьное решение в пакете MatLab с использованием процедур Symbolic Tollbox. Результаты иллюстрируются известным примером [10] и показывается, что полученный регулятор обеспечивает минимальное значение функционала меньше, чем в [10].

Ключевые слова: алгоритм параметризации, Matrix Fraction Decomposition, решение Диофантова уравнения, факторизация эрмитовых матричных полиномов

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно [6, 13-15], решение задачи синтеза оптимальных регуляторов строится с помощью параметризации независимых матриц, охватывающее более общий круг задач [3-6], чем [8, 11], которые нацелены только на случаи, когда измеряются все координаты объекта. В [6, 7, 13, 14] рассматривается частный случай, т.е. измеряются части фазовых координат объекта и, вводя малый параметр, предполагается, что измеряются все координаты объекта с помехой шумов. Далее, с помощью стремления к нулю малого параметра, получены асимптотические формулы для регуляторов по части фазовых координат объекта. Там же показывается, что при выполнении этих процессов требуются соответствующие преобразования, которые для численных реализаций высоких размерностей сталкиваются с большими трудностями.

В [15] приводится другой подход, опирающийся на вычисления MFD представлением передаточных матриц, факторизации, сепарации дробно-рациональных выражений, решением Диофантова уравнения, которое

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.05.2017

позволяет решать задачи синтеза оптимальных регуляторов, когда даже на правой и левой части соотношений (коэффициенты наблюдений и фазовых векторов) наблюдений присутствуют полиноминальные матрицы (после преобразований Лапласа). Однако, в [13, 14] отсутствует вычислительный алгоритм для решений данной задачи, который не позволяет расширить эти результаты даже для разработки алгоритмов высокой точности. Поэтому, в данной работе приводится алгоритм решения задачи оптимального синтеза по выходу в более общем случае так, чтобы можно было создать высокоточный алгоритм для оптимального регулятора с использованием процедур Symbolic Tollbox пакета MatLab. Результаты иллюстрируются на примерах [10, 14], где в примере [10] получен регулятор, отличный от [10], обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы и значение функционала гораздо меньше, чем в [10]. Во втором примере [14], применяя предложенный алгоритм, получены одинаковые выражения для регуляторов.

2. Постановка задачи

Движение объекта описывается линейным полиномиальным оператором в частотной области [13, 14]

$$Py_1 = Mu_2 + \psi \tag{1}$$

Вектор наблюдаемых величин выражен в следующем виде

$$\Sigma_0 y_2 = \Sigma_1 y_1 + \varphi \tag{2}$$

Здесь y_2 - вектор наблюдаемых величин, y_1 - вектор подлежащих стабилизации координат объекта, u_2 - вектор управляющих воздействий, ψ, φ - векторы внешних случайных воздействий и шумов измерений, являющимися стационарными случайными процессами с дробно рациональными матрицами спектральных плотностей $S_\psi, S_\varphi. P, M, \Sigma_0, \Sigma_1$ полиномиальные матрицы является функциями параметра s Лапласа и имеют соответствующие размерности.

Задача состоит в нахождении уравнения регулятора в виде

$$W_0 u_2 = W_1 y_2, \tag{3}$$

который минимизирует функционал

$$I = < y_1' R y_1 > + < u_2' C u_2 > \tag{4}$$

при условии асимптотической устойчивости замкнутой системы (1)-(3), т.е. корни матрицы замкнутой системы (1)-(3)

$$\begin{bmatrix} P & -M & 0 \\ \Sigma_1 & 0 & -\Sigma_0 \\ 0 & -W_0 & -W_1 \end{bmatrix}$$

лежат на левой полуплоскости.

Здесь W_0, W_1 - искомые матрицы соответствующих размеров, элементы которых операторные полиномы, R, C - весовые матрицы, $<..>$ - символ математического ожидания.

Пусть из системы (1) - (3)

$$y_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2$$
$$y_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2$$
$$u_2 = -Ky_2 .$$

Тогда

$$G_{11} = P^{-1}\theta_1 ; \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$
$$G_{12} = P^{-1}M;$$
$$G_{21} = \Sigma_0^{-1}(\Sigma_1 P^{-1}\theta_1 + \theta_2) ; \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix}$$
$$G_{22} = \Sigma_0^{-1}\Sigma_1 P^{-1}M .$$
$$u_1 = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix};$$

где E единичная матрица соответствующей размерности.

По обозначениям (5) матрица передаточной функции соответствующего регулятора [15] определяется в следующем виде

$$W = (v_r - QN_l)^{-1}(u_r + QD_l) \tag{6}$$

Здесь D_l , N_l - результат левого MFD представления матрицы G_{22}

$$G_{22} = D_l^{-1}N_l .$$

D_r , N_r - результат правого MFD представления матрицы G_{22}

$$G_{22} = N_r D_r^{-1} .$$

v_r , u_r - решение следующего матричного Диофантового уравнения

$$u_r N_r + v_r D_r = E . \tag{7}$$

Вычисляя левое представление матрицы $\Sigma_1 P^{-1} = \tau^{-1}\gamma;$ получим $N_l = \gamma M;\ D_l = \tau\Sigma_0$.

В [15] доказывается, что при таком выборе $v_r\ , u_r$ с помощью (3), (6) система (1) стабилизируется.
Введем обозначения:

$$Z = \begin{bmatrix} v_r & u_r \\ N_l & -D_l \end{bmatrix}.\quad Z^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}, Z\,Z^{-1} = E, \tag{8}$$

и выражения для вектора минимизируемой ошибки

$$e = \begin{bmatrix} R^{1/2} y_1 \\ C^{1/2} u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{1/2} P^{-1}[\theta_1 - M(\theta_{11}Q + \theta_{12})(\gamma\theta_1 + \tau\theta_2)] \\ C^{1/2}(\theta_{11}Q + \theta_{12})(\gamma\theta_1 + \tau\theta_2) \end{bmatrix} u_1;$$

где $R^{1/2}$ - корень квадратный из матриц R, $C^{1/2}$ - корень квадратный из матриц C .
Тогда функционал (4) примет следующий вид

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} Sp(e_* e)ds, \quad s = i\omega .$$

Обозначим

$$\overline{\theta_1} = \begin{bmatrix} S_\psi^{1/2} & 0 \end{bmatrix}, \overline{\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & S_\varphi^{1/2} \end{bmatrix}; S_\psi^{1/2} S_{\psi*}^{1/2} = S_\psi;\ S_\varphi^{1/2} S_{\varphi*}^{1/2} = S_\varphi \tag{9}$$

тогда получим

$$e = [T_1 - T_2 Q T_3]\, W;$$

где

$$T_1 = \begin{bmatrix} R^{1/2} P^{-1}[(E - M\theta_{12}\gamma)\overline{\theta_1} - M\theta_{12}\tau\overline{\theta_2})] \\ -C^{1/2}\theta_{12}(\gamma\overline{\theta_1} + \tau\overline{\theta_2}) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} R^{1/2} P^{-1} M\theta_{11}] \\ C^{1/2}\theta_{11} \end{bmatrix}, \qquad T_3 = \gamma\overline{\theta_1} + \tau\overline{\theta_2}, \tag{11}$$

Исходная задача эквивалентна задаче минимизации нормы матриц $T_1 - T_2 Q T_3$ на множестве матриц Q, не имеющей полюсов в правой полуплоскости. Для нахождения матрицы Q введем следующие обозначения:

$$H_* H = T_{2*} T_2 \ ;$$
$$D D_* = T_3 T_{3*} \ ;$$
$$L_0 + L_+ + L_- = H_*^{-1} T_{2*} T_1 T_{3*} D_*^{-1} \qquad (12)$$

L_0 -константа или полином от s, L_+ - правильная дробь с полюсами в левой, L_- - правильный полином с полюсами в правой полуплоскости. Тогда

$$Q = H^{-1}(L_0 + L_+)\ D^{-1} \qquad (13)$$

и оптимальный регулятор имеет вид

$$W = (v_r - QN_l)^{-1}(u_r + QD_l)\,. \qquad (14)$$

Таким образом, имеем следующий алгоритм для нахождения матриц W из (14)

Алгоритм

1. Формулируются матрицы $P, M, R, C, S_\psi, S_\phi$ из (1)-(4)
2. Согласно (5) вычислим $G_{11},\ G_{12}, G_{21}, G_{22}$
3. С помощью левых и правых MFD представлений находим $D_l\ , N_l, D_r, N_r$
4. Решая Диофантово уравнение (7) определяем $v_r\ , u_r$.
5. Согласно (8), строим матрицу Z и находим Z^{-1}.
6. По (9)-(11) вычисляем T_1, T_2, T_3
7. Применяя алгоритм факторизации полиномов [2] для $T_{2*} T_2$; $T_3 T_{3*}$ находим из первых двух соотношений $H\,, D$ соответственно
8. Используя алгоритм сепарации дробно рационального выражения [10] находим $L_{0,}\ L_+$.
9. По формуле (12) вычисляем Q .
10. Согласно (13) находим оптимальной регулятор $W_0,\ W_1$.

Для иллюстрации алгоритма рассмотрим следующий пример, взятый из [14].

Пример. Движение объекта описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$\dot{x}_1 = x_2 + u + \psi_1,$

$\dot{x}_2 = x_1 + u + \psi_2$

где матрица спектральной плоскости стационарных S_ψ случайных процессов $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$

имеет вид:

$$S_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

Минимизируемый функционал имеет вид:

$$I = 3 < x_1^2 > +3 < x_2^2 > + < u^2 > .$$

Допустим, измерению доступна только первая координата

$$S_\varphi = \lim_{\gamma \to \infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

В принятых обозначениях

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}; C = 1; S_\varphi = 1; \Sigma_0 = 1; \Sigma_1 = [1\ 0];$$

$$P^{-1} = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix};$$

Согласно (9)

$$\overline{\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \overline{\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$G_{12} = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}, G_{22} = \frac{1}{s^2 - 1} s;$$

$$D_l = s^2 - 1, N_l = s; D_r = s^2 - 1, N_r = s;$$

Тогда решая Диофантово уравнение (7) определяем $v_r = -1, u_r = s$.

Согласно (8) строим матрицу

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & s \\ s & -(s^2 - 1) \end{bmatrix}$$

и находим

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} s^2 - 1 & s \\ s & 1 \end{bmatrix}.$$

По (10), (11) вычисляем

$$T_1 = \begin{bmatrix} -s\sqrt{3} & -2\sqrt{6} & -s^2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & -s\sqrt{3} \\ -s^2 & -2s\sqrt{2} & -s(s^2-1) \end{bmatrix}, T_2, = \begin{bmatrix} s\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ s^2 - 1 \end{bmatrix}; \; T_3 = \begin{bmatrix} s & 2\sqrt{2} & s^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Применяя алгоритм факторизации полиномов, находим

$$H = s^2 + 3s + 2, \; D = s^2 + 3s + 3$$

Используя алгоритм сепарации дробно - рационального выражения, находим

$$L_{0,} = -(s^3 + 6s^2 + 15s + 21); L_{+} = 0,$$

По формуле (13) вычисляем

$$Q = -\frac{s^3 + 6s^2 + 15s + 21}{(s^2 + 3s + 2)(s^2 + 3s + 3)}.$$

Тогда из (14)

$$W_0 = s^2 + 6s - 6, \;\; W_1 = 21s + 21$$

который совпадает с результатом, полученным в [14].

2. Частотный метод решений задачи оптимального синтеза по выходу [10].

Допустим, что в (1), (2) $\psi = 0, \varphi = 0$ т.е. не учитываются случайные воздействия и шумов измерений. $\Sigma_0 = 0, \Sigma_1 = S$ измеряются некоторые координаты объекта.

Требуется найти

$$W_0 u_2 = W_1 y_1 \tag{15}$$

так, чтобы замкнутая система (1), (15) была асимптотически устойчива и функционал

$$I = < y_1' R y_1 > + < u_2' C u_2 > \tag{16}$$

получил минимальное значение.

При таких условиях задача (1) - (3) выглядит так:

$$\dot{y}_1 = Fy_1 + G_1 u_2, \tag{17}$$

$$u_2 = -Sy_1. \tag{18}$$

Начальное условие - ненулевое случайное число. $< y_1(0) >= 0, < y_1(0) y_1^{'}(0) >= S_y$

Пусть в (1)

$$P = sE - F;\ M = G$$

Применяя преобразование Лапласа (15), (16) получим

$$Py_1 = Mu_2 + \xi; \qquad \xi = y_1(0),$$

а функционал представим в виде

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Sp(y_{1*} R y_1 + u_{2*} C u_2) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Sp(R y_1 y_{1*} + C u_2 u_{2*}) ds \quad , \quad s = i\omega \tag{19}$$

Из (17), (18) определим y_1 и u_2

$$y_1 = (P + MS)^{-1} y_1(0) = F_y y_1(0)$$

$$u_2 = S(P + MS)^{-1} y_1(0) = SF_y y_1(0) = F_u y_1(0) \tag{20}$$

где матричные передаточные функции определяются так

$$F_y = (P + MS)^{-1} \ ; \ F_u = SF_y .$$

Учитывая (13) и (14), получим

$$F_y = u_l - N_r Q \ ; \ F_u = -(v_l + D_r Q) . \tag{21}$$

Тогда (19) примет вид

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} Sp(RF_y S_y F_{y*} + CF_u S_y F_{u*}) ds \quad , \quad s = i\omega . \tag{22}$$

Обозначим

$$e = \begin{bmatrix} R^{1/2} F_y S_y^{1/2} \\ C^{1/2} F_u S_y^{1/2} \end{bmatrix}$$

Тогда (22) переходит к виду

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} Sp(e_* e)ds \quad , \quad s = i\omega$$
.

Если учесть (21) в (22), то получим

$$e = \begin{bmatrix} R^{1/2} & u_l \\ -C^{1/2} & v_l \end{bmatrix} S_y^{1/2} - \begin{bmatrix} R^{1/2} & N_r \\ C^{1/2} & D_r \end{bmatrix} Q S_y^{1/2} \quad .$$

Обозначим

$$\overline{T}_1 = \begin{bmatrix} R^{1/2} & u_l \\ -C^{1/2} & v_l \end{bmatrix} S_y^{1/2} \; ; \; \overline{T}_2 = \begin{bmatrix} R^{1/2} & N_r \\ C^{1/2} & D_r \end{bmatrix} ; \; \overline{T}_3 = S_y^{1/2} \; ; \qquad (23)$$

Тогда по аналогу (12)

$$H_* H = \overline{T}_{2*}\overline{T}_2 = N_{r*} R N_r + D_{r*} C D_r \; ;$$
$$D = \overline{T}_3 = S_y^{1/2} \; ;$$
$$L_0 + L_+ + L_- = H_*^{-1}\, \overline{T}_{2*}\, \overline{T}_1 \overline{T}_{3*}\, D_*^{-1} D^{-1} = H_*^{-1}(N_{r*} R - H_* H u_r)\, P^{-1} \qquad (24)$$

где свободный параметр Q определяется в следующем виде

$$Q = H^{-1}(L_0 + L_+)\; D^{-1}$$

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем числовом примере.

Пример. [10]

Рассмотрим задачи (17), (18) где исходные данные, т.е. коэффициенты уравнения (16)-(18) имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \; R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; C = 1; \; S = [0 \;\; 1]$$

Измеряется только вторая координата объекта.

$$u = WSx = W\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x;$$

В принятых обозначениях коэффициенты уравнения (1) , (2) после преобразования Лапласа выглядят:

$P = sE - F; \; M = G$ т.е. M не зависит от s .

$$P=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}; M=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \Sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \Sigma_0=1;\ R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C=1$$

$$P^{-1}=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix};$$

Согласно (4), вычислим

$$G_{11}=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{12}=P^{-1}M=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix};$$

$$G_{21}=\Sigma_0^{-1}(\Sigma_1 P^{-1}\theta_1+\theta_2)=\frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} -1 & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{22}=\Sigma_0^{-1}\Sigma_1 P^{-1}M=\frac{1}{s^2+1}s=D_l^{-1}N_l;\ D_l=s^2+1; N_l=s$$

$$\Sigma_1 P^{-1}=\tau^{-1}\gamma=[-1\ s]\tfrac{1}{s^2+1};\quad \tau=s^2+1; \gamma=[-1\ s];$$

$$N_r=s;\ D_r^{-1}=\frac{1}{1+s^2}$$

Для удовлетворения уравнения (7) выбираем $v_r=1;\ u_r=-s$.
Согласно (7)

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ s & -s^2-1 \end{bmatrix}.\ Z^{-1}=\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & -1 \end{bmatrix},$$

По (8) вычислим T_1, T_2, T_3 в виде

$$T_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -s & s^2 & 0 \end{bmatrix},\ T_2=\begin{bmatrix} 1 \\ s^2+1 \end{bmatrix},\ T_3=\begin{bmatrix} -1 & s & 0 \end{bmatrix},$$

Факторизовав (11), получим

$$H_*H = T_{2*}T_2 = s^4 + 2s^2 + 2 = (s^2 + 0.9102s + \sqrt{2})(s^2 - 0.9102s + \sqrt{2});$$

$$D D_* = T_3T_{3*} = -s^2 + 1 = (s+1)(-s+1);$$

и проведя сепарацию

$$L_0 + L_+ + L_- = H_*^{-1} T_{2*} T_1 T_{3*} D_*^{-1} = \frac{s^5}{s^3 - 1.9102s^2 + 2.3244s + \sqrt{2}} = s^2 + 1.9102s + 1.3245$$

$$L_0 = s^2 + 1.9102s + 1.3245; \; L_+ = 0$$

По формуле (13) и (14) для Q и N получим следующие значения

$$Q = H^{-1}(L_0 + L_+)\; D^{-1} = \frac{s^2 + 1.9102s + 1.3245}{s^3 + 1.9102s^2 + 2.3244s + \sqrt{2}}.$$

$$W = (v_r - QN_l)^{-1}(u_r + QD_l) = \frac{0.5s + 1.3245}{s + 1.4142}.$$

т.е. согласно с(14)

$$W_0 = s + 1.4142 \;;\; W_1 = 0.5s + 1.3245.$$

При этих вычисленных данных детерминант замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s & -1 \\ 0 & 0.5s + 1.3245 & s + \sqrt{2} \end{bmatrix} = s^3 + 1.9142s^2 + 2.3245s + \sqrt{2}$$

превращается в полином $s^3 + 1.9102s^2 + 2.3245s + \sqrt{2} = 0$, корни которого находятся в левой полуплоскости $-0.4558 \pm 1.09673; -1.0026$.

С этими исходными данными вычислен функционал (17). В частотной области значение функционала равно 1.9231 , а в [10] значение функционал равно 2.45. Можно констатировать, что предложенный алгоритм дает более точный результат, чем в [10].

3. Алгоритм, требующий высокую точность.

Теперь остановимся на использовании метода высокой точности на базе Symbolic Toolbox пакета Matlab. Решение данной задачи сформулировано с помощью вышеуказанного алгоритма. Проанализировав этот алгоритм, видно, что там основное место занимает факторизация полиномов и сепарация дробно-рациональных выражений, решение

Диафантовых уравнений и MFD представление передаточных матриц. Для факторизация полиномов [16, 17] и сепарация дробно- рациональных выражений разработан высокоточный алгоритм [1, 2, 12], который сводится к решению алгебраического уравнения Риккати. Для решения диофантовых уравнений (7) использован метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение. Этот метод легко реализуем в Symbolic Toolbox пакета Matlab. Опишем алгоритм решение задачи (17)-(19) в символьном виде

Алгоритм

1. Заданы исходные данные. P, M, R, C, S в символьном виде
2. Вычисляется $\left[P^{-1}\right]_S$ с помощью алгоритма, описанного в [6,8]
3. Вычисляется
$$\left[G_{12}\right]_S = \left[P^{-1}\right]_S M;$$
$$\left[G_{21}\right]_S = (S\left[P^{-1}\right]_S \theta_1 + \theta_2)$$
,
$$G_{22} = S\left[P^{-1}\right]_S M = \left[D_l^{-1}\right]_S \left[N_l\right]_S;$$
4. С помощью MFD представление $S\left[P^{-1}\right]_S = \left[\tau^{-1}\right]_S \left[\gamma\right]_S$; находим $\left[\tau^{-1}\right]_S, \left[\gamma\right]_S$
5. Решаем уравнение $\left[u_r\right]_S \left[N_r\right]_S + \left[v_r\right]_S \left[D_r\right]_S = E$ с помощью описанного алгоритма в [8] и находим $\left[v_r\right]_S$, $\left[u_r\right]_S$
6. Строится матрица $\left[Z\right]_S = \begin{bmatrix} \left[v_r\right]_S & \left[u_r\right]_S \\ \left[N_l\right]_S & -\left[D_l\right]_S \end{bmatrix}$, и находится $\left[Z^{-1}\right]_S = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$ с помощью алгоритма описанного в [6,8]
7. Формируются матрицы
$$\left[T_1\right]_S = \begin{bmatrix} R^{1/2} & u_l \\ -C^{1/2} & v_l \end{bmatrix} S_y^{1/2}; \left[T_2\right]_S = \begin{bmatrix} R^{1/2} & N_r \\ C^{1/2} & D_r \end{bmatrix}; \left[T_3\right]_S = S_y^{1/2};$$
8. С помощью высокоточного алгоритма факторизации [1,16]
$$\left[H_*\right]_S \left[H\right]_S = \left[T_{2*}\right]_S \left[T_2\right]_S$$
факторизуем выражение
$$\left[D\right]_S \left[D_*\right]_S = \left[T_3\right]_S;$$

9. Сепарируя [6,17]
$$\left[L_0\right]_S+\left[L_+\right]_S+\left[L_-\right]_S=\left[H_*^{-1}\right]_S(\left[N_{r*}\right]_S R-\left[H_*\right]_S\left[H\right]_S\left[u_r\right]_S)\left[P^{-1}\right]_S$$
находим $\left[L_0\right]_S,\left[L_+\right]_S$
10. Вычисляем матрицу $\left[Q\right]_S=\left[H^{-1}\right]_S(\left[L_0\right]_S+\left[L_+\right]_S)\left[D^{-1}\right]_S$ и искомый регулятор $\left[W\right]_S=(\left[v_r\right]-\left[Q\right]_S\left[N_l\right]_S)^{-1}(\left[u_r\right]_S+\left[Q\right]_S\left[D_l\right]_S)$.

3. Заключение

Используя частотный алгоритм параметризации, предложен вычислительный алгоритм для решения линейно- квадратичной гауссовой задачи который позволяют найти символьное решение в пакете MatLab с использованием процедур Symbolic Tollbox. Результаты иллюстрируются известным примером [10] и показывается, что полученный регулятор обеспечивает минимальное значение функционала меньше, чем в [10].

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам Ларину В.Б. и Алиеву Ф.А. за ценные замечания и советы.

Литература

1. Agamalieva L.F., Aliev F.A.,Velieva N.I., Approximate Factorization of Matrix Polynomials with Applications to the Synthesis Problems . Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Vol.58, 106, N.4, 2015, pp.371-382.
2. Agamalieva L.F., Aliev F.A., Velieva N.I., Algorithms for factorization of the irregular matrix polynomials using symbolic computations, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.4, N.1, 2013, pp.103-109.
3. Aliev F. A., Larin V. B., Comment on 'Persistent inputs and the standard H-2-multivariable control problem' by K. Park and JJ Bongiorno Jr Intern. Journal of Control, Vol.83, No.6, (010, pp.1296-1298
4. Aliev Fikret A., Larin V.B., Comment on "Youla-Like Parametrizations Subject to QI Subspace Constraint", Appl. and Comput. Mathematics, Vol.14, №3, 2015, pp.381-388
5. Aliev F.A, Larin V.B Comments on "Optimizing simultaneously over the numerator and denominator polynomials in the Youla-Kucera parameterization" IEEE Transa. on Automatic Control V.52, N.4, 2007, pp.763-763

6. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of linear control systems. Analytical Methods and Computational Algorithms. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. 1998, 261 p.
7. Aliev F.A., Larin V.B. Parameterization of Feasible Solutions in problems of control signal filtering (survey). Applied and Computational Mathematics, Special Issue on Infor. Tech. and Appl., V.6, N.2, 2007, pp.126-142.
8. Kucera V. Discrete linear control the polynomial equation approach. Praha.Akademia, 1979, 206 p.
9. Larin V.B. High-accuracy algorithms for solution of discrete periodic Riccati equations., Appl. Comput. Math., V.6, N.1, 2007, pp.10-17
10. Levine W.S., Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. IEEE Trans.Autom. Control, 1970, V.AC-15, N.1
11. Youla D.C., Jabr H.A., Bonjiorno J.J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers–part I: the single-input-output case IEEE Trans. Automat.Contr., 1976, AC- 21, N.1, pp.3-15.
12. Агамалиева Л.Ф., Велиева Н.И. Высокоточный алгоритм решения многомерной задачи синтеза систем стабилизации при внешних возмущениях, Proceedings of IAM, V.3, N.1, 2014, pp.98-104.
13. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Параметризация множеств стабилизирующих регуляторов в механических системах. Прикладная механика, т.44, N.6, (2008), с.3-28
14. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К. И. , Сунцев В. Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления, Изд. « Наукова думка», 1978, 327 с.
15. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку, Элм, 1994, 274 с.
16. Велиева Н.И. , Л.Ф.Агамалиева Высокоточный алгоритм факторизации полинома в среде MATLAB. Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук, том XXXI, N.6, (2011), с.14-19.
17. Велиева Н.И. Раджабов М.Ф., Агамалиева Л.Ф., Высокоточные алгоритмы для решения задачи синтеза оптимальных линейных систем с одним входом и одним выходом. Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук, том XXIX, N.6, 2009, с.90-96.

Çıxışa nəzərən xətti-kvadratik optimal sintez məsələsinin kəsilməz halda yüksək dəqiqlikli tezlik alqoritmi

N.İ. Vəliyeva

XÜLASƏ

İşdə parametrizasiya alqoritmindən istifadə edərək çıxışa nəzərən xətti-kvadratik Qauss optimal sintez məsələsinin hesablama alqoritmi verilir. Təklif olunan alqoritm Ermit matris polinomların faktorizasiyası, MFD ayrılışı , Diofant tənliklərinin həlli və kəsr-rasional ifadələrin separasiyası alqoritmlərindən istifadə edərək Matlab riyazi proqramlar paketinin Symbol Toolbox prosedurunda yerinə yetirilə bilən simvol hesablamar mühitində həllini tapmağa imkan verir.Alınan nəticələr [10] ğöstərilən məlum misalla həll olunur və qeyd olunur ki, alınan requlyatorla funksionalın minimumu [10]-dan tapılan minimumdan daha kiçikdir.

Açar sözlər: parametrizasiya alqoritmi, MFD ayrılışı, Diophant tənliklərin həlli, matrix polinomların faktorizasiyası

The frequency high accuracy algorithm for the solution of continuous linear-quadratic optimal synthesis problem by output variable

N.I. Velieva

ABSTRACT

In the paper using the frequency algorithm of parameterization the computational algorithm for the solution of linear quadratic Gaussian problem of optimal synthesis by output variable in continuous time is considered. The proposed algorithm is related to the factorization of Hermitian matrix polynomials, the representation of Matrix Fraction Decomposition (MFD), the solution of the Diophantine equation and the separation of fractional-rational expressions which allows finding a symbolic solution in the MatLab package using Symbolic Tollbox procedures. The results are illustrated on the well-known example [10] and it is shown that the obtained regulator provides the minimum value of a functional is less than in [10].

Keywords: Algorithm of parametrization, matrix fraction decomposition, solution of the Diophantine equation, factorization of matrix polynomials